1. Fonction sinusoïdale.

1.1. Définition.

$$\boxed{u(t) = U_M \sin(\omega t + \theta_u)} \text{ et } \boxed{i(t) = I_M \sin(\omega t + \theta_i)}.$$

- U_M et I_M : amplitudes en volts (**V**) et ampères (**A**) ;
- **t** : temps en secondes (**s**) ;
- ω : pulsation en radians par seconde (**rad.s^{-1}**) ;
- θ_u et θ_i : phase à l'origine en radians (**rad**).

1.2. Valeur moyenne.

$$U_{moy} = 0 \text{ et } I_{moy} = 0.$$

1.3. Valeur efficace.

$$\boxed{U = \frac{U_M}{\sqrt{2}}} \text{ et } \boxed{I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}}.$$

1.4. Période et fréquence.

Par définition la période **T**, exprimée en secondes (**s**), est telle que :

$$u(t) = u(t + kT) \text{ et } i(t) = i(t + kT) \text{ avec } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Par conséquent :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \text{ ou } \boxed{\omega = 2\pi f} \text{ avec } \boxed{f = \frac{1}{T}} \text{ fréquence en hertz (Hz).}$$

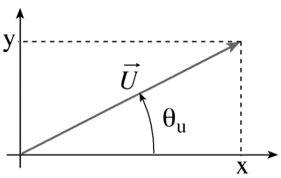
2. Représentation de Fresnel.

La représentation de Fresnel est une représentation vectorielle des grandeurs sinusoïdales.

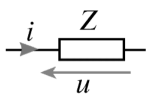
2.1. Représentation d'un vecteur.

En coordonnées cartésiennes : $\vec{U}\,(x\,;y)$ et $\vec{I}\,(x\,;y)$.

En coordonnées polaires : $\vec{U}\,(U\,;\theta_u)$ et $\vec{I}\,(I\,;\theta_i)$.



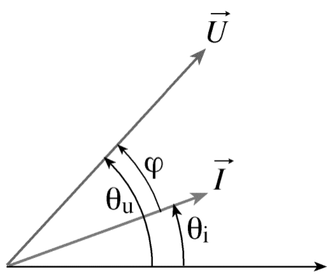
2.2. Représentation de Fresnel.

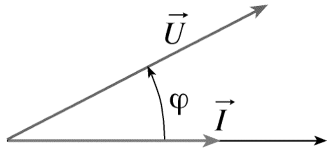


Pour la tension : $u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_u) \Leftrightarrow \vec{U}\,(U\,;\theta_u)$.

Pour le courant : $i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_i) \Leftrightarrow \vec{I}\,(I\,;\theta_i)$.

Différence de phase : $\varphi = \theta_u - \theta_i$.





Si on prend le courant **i** comme origine des phases la représentation se simplifie.

$\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{U}}\ (\mathbf{U}\ ;\ \varphi)$ et $\mathbf{i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)} \Leftrightarrow \vec{\mathbf{I}}\ (\mathbf{I}\ ;\ \mathbf{0})$

j (phi) représente le déphasage de **i** par rapport à **u**. Il dépend de la nature du dipôle.

2.3. Déphasage.

a. Valeurs instantanées.

$$\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_u)} \text{ et } \mathbf{i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_i)}.$$

b. Différence de phase.

$\varphi = \theta_u - \theta_i$: φ est la **différence de phase entre u et i** ou **le déphasage de i par rapport à u**.

- si **φ < 0**, **i** est en avance sur **u** : la charge est de nature **capacitive**.
- si **φ > 0**, **i** est en retard sur **u** : la charge est de nature **inductive**.
- si **φ = 0**, **i** et **u** sont en phase : la charge est de nature **résistive**.

Si on prend **u** comme référence des phases alors $\boldsymbol{\theta_u = 0}$ et $\boldsymbol{\theta_i = -\varphi}$. On peut donc écrire :

$$\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t)} \text{ et } \mathbf{i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t - \varphi)}.$$

Si on prend **i** comme référence des phases alors $\boldsymbol{\theta_i = 0}$ et $\boldsymbol{\theta_u = \varphi}$. On peut donc écrire :

$$\mathbf{u(t) = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)} \text{ et } \mathbf{i(t) = I\sqrt{2}\sin(\omega t)}.$$

c. Déphasage en représentation de Fresnel.

Sur le diagramme de Fresnel, **φ** est l'angle allant de $\vec{\mathbf{I}}$ vers $\vec{\mathbf{U}}$.

d. Mesure du déphasage à l'oscilloscope.

À l'oscilloscope, **on mesure l'intervalle de temps Δt allant de u vers i** ainsi que la période **T**. Sachant qu'une période complète correspond à **2π rad** ou **360°**, on effectue une règle de trois pour trouver le déphasage **φ**.

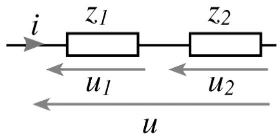
$$\boxed{\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}} \text{ en radians ou } \boxed{\varphi = 360\frac{\Delta t}{T}} \text{ en degrés.}$$

En résumé, sachant que **φ** est le déphasage de **i** par rapport à **u**, on a les résultats ci-après.

Grandeurs instantanées	Représentation de Fresnel	Mesure à l'oscilloscope
$\varphi = \theta_u - \theta_i$	Angle allant de **i** vers **u**	Mesurer **Δt** de **u** vers **i**

2.4. Loi des mailles, loi des nœuds en représentation de Fresnel.

Considérons l'exemple ci-dessous où $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{i}$ ont la même période.

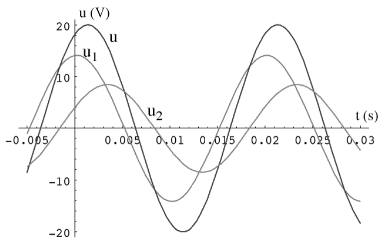


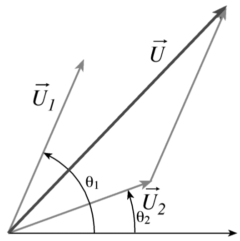
Écrivons la loi des mailles instantanée :

$$\mathbf{u = u_1 + u_2} \text{ avec } \mathbf{u_1(t) = U_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_1)} \text{ et } \mathbf{u_2(t) = U_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \theta_2)}.$$

Écrivons la loi des mailles vectorielle :

$$\mathbf{\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2} \text{ avec } \mathbf{\vec{U}_1\ (\ U_1\ ;\ \theta_1\ )} \text{ et } \mathbf{\vec{U}_2\ (\ U_2\ ;\ \theta_2\ )}.$$





⚠ En aucun cas il ne faut faire la somme algébrique des valeurs efficaces $\mathbf{U_1}$ et $\mathbf{U_2}$. $\mathbf{U \neq U_1 + U_2}$

3. Puissances en régime sinusoïdal.

3.1. Puissance active.

La puissance active est la moyenne de la puissance instantanée. Elle s'exprime en watts (**W**).

$$\boxed{\mathbf{P = UI\cos\varphi}}.$$

3.2. Puissance réactive.

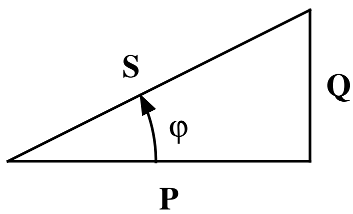
La puissance réactive s'exprime en voltampère réactif (**VAR**), soit : $\boxed{\mathbf{Q = UI\sin\varphi}}$.

3.3. Puissance apparente.

La puissance apparente permet le dimensionnement d'une installation. Elle s'exprime en voltampère (**VA**), soit : $\boxed{\mathbf{S = UI}}$.

3.4. Autres relations.

- $\boxed{\mathbf{\cos\varphi = \frac{P}{S}}}$ et $\boxed{\mathbf{\tan\varphi = \frac{Q}{P}}}$ ou $\boxed{\mathbf{Q = P\tan\varphi}}$.
- Relation de Pythagore: $\mathbf{S^2 = P^2 + Q^2}$ ou $\boxed{\mathbf{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}}$



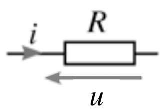
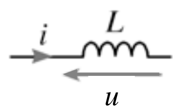
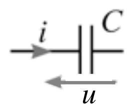
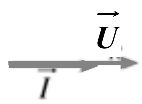
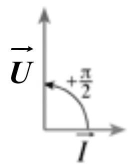
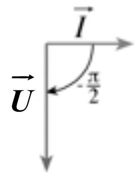
4. Les dipôles passifs linéaires.

4.1. Définition de l'impédance d'un dipôle.

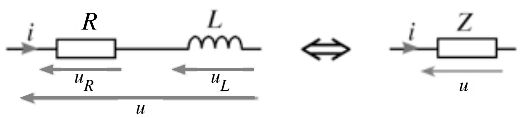
Un dipôle passif linéaire soumis à une tension **u** sinusoïdale de pulsation **w** et traversé par un courant **i** sinusoïdal de même pulsation a pour impédance **Z**, exprimée en ohms (**Ω**):

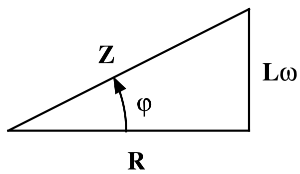
$$\boxed{\mathbf{Z = \frac{U}{I}}}.$$

4.2. Tableau récapitulatif.

Dipôles	Résistance R	Inductance L	Capacité C
Schéma			
Équation fondamentale	$u = Ri$	$u = L\dfrac{di}{dt}$	$i = C\dfrac{du}{dt}$
Relation entre les valeurs efficaces	$U = RI$	$U = L\omega I$	$U = \dfrac{1}{C\omega}I \Leftrightarrow I = C\omega U$
Impédance $Z = \dfrac{U}{I}$ (Ω)	$Z = R$	$Z = L\omega$	$Z = \dfrac{1}{C\omega}$
Déphasage φ (rad)	$\varphi = 0$	$\varphi = \dfrac{\pi}{2}$	$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			
Puissance active $P = UI\cos\varphi$ (W)	$P = UI = RI^2 = \dfrac{U^2}{R}$ **R** absorbe **P**	0	0
Puissance réactive $Q = UI\sin\varphi$ (VAR)	0	$Q = UI = L\omega I^2$ **L** absorbe **Q**	$Q = -UI = -C\omega U^2$ **C** fournit **Q**

4.3. La bobine réelle.





Z est l'impédance de la bobine réelle en ohms (**Ω**) : $\boxed{Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$ et $\boxed{\tan\varphi = \dfrac{L\omega}{R}}$.

4.4. Le condensateur réel.

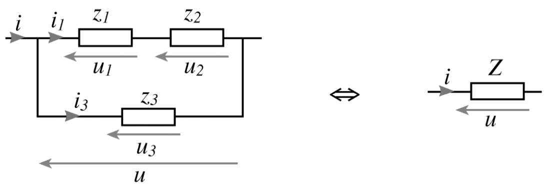
Le condensateur réel ne s'éloigne du condensateur parfait que pour les très hautes fréquences c'est-à-dire f > **1 MHz**. Nous considérons ici que le condensateur est parfait.

5. Théorème de Boucherot.

5.1. Théorème.

Les puissances active et réactive absorbées par un groupement de dipôles sont respectivement égales à la somme des puissances actives et réactives absorbées par chaque élément du groupement.

5.2. Exemple.



- Puissance instantanée : $\mathbf{p = p_1 + p_2 + p_3}$ avec $\mathbf{p = ui}$;
- Puissance active : $\boxed{\mathbf{P = P_1 + P_2 + P_3}}$ avec $\mathbf{P = UI\cos\varphi}$;
- Puissance réactive : $\boxed{\mathbf{Q = Q_1 + Q_2 + Q_3}}$ avec $\mathbf{Q = UI\sin\varphi = P\tan\varphi}$.

⚠ Le théorème de Boucherot n'est pas valable pour la puissance apparente **S**.

6. Facteur de puissance.

6.1. Définition générale.

$$\mathbf{k = \frac{P}{S}}.$$

6.2. Cas particulier du régime sinusoïdal.

$$\mathbf{k = \frac{P}{S} = \frac{UI\cos\varphi}{UI} = \cos\varphi} \text{ soit } \boxed{\mathbf{\cos\varphi = \frac{P}{S}}}.$$

6.3. Importance du cosφ.

La valeur efficace **I** du courant **i** circulant dans un dipôle soumis à une tension **u** de valeur efficace **U** et consommant la puissance active **P** est :

$$\mathbf{I = \frac{P}{U\cos\varphi}}.$$

Plus **I** est faible plus les pertes en lignes sont faibles. Pour diminuer **I** sans modifier **P** ou **U**, il faut augmenter **cosφ**. On dit qu'il faut **relever le facteur de puissance**.

On sait aussi que :

$$\mathbf{\cos\varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}}.$$

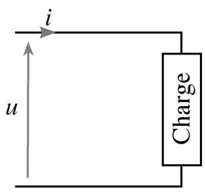
Plus **Q** tend vers **0**, plus **cosφ** se rapproche de **1**. En rajoutant à l'installation électrique des condensateurs ou des inductances, on modifie **Q** sans modifier **P**.

6.4. Relèvement du facteur de puissance.

Si l'installation électrique est **inductive** (**Q > 0**), il faut diminuer **Q** en adjoignant des condensateurs (**Q_c < 0**) de telle sorte que **$0 \leq Q + Q_c < Q$**

L'objectif est de dimensionner les condensateurs de capacité globale **C** en fonction du facteur de puissance recherché pour passer du facteur de puissance $\mathbf{\cos\varphi}$ à $\mathbf{\cos\varphi'}$.

Sans le condensateur

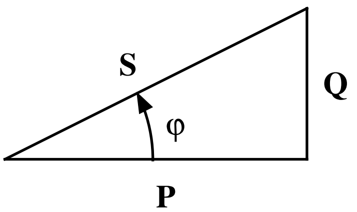


$$P = UI\cos\varphi$$

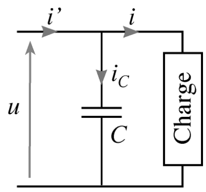
$$Q = UI\sin\varphi$$

$$Q = P\tan\varphi$$

$$S = UI$$



Avec le condensateur

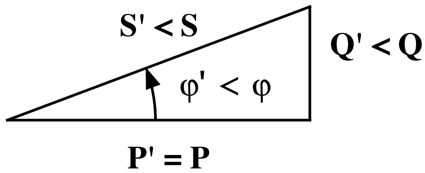


$$P' = UI'\cos\varphi' = P \text{ avec } \cos\varphi' > \cos\varphi$$

$$Q' = UI'\sin\varphi' \text{ avec } Q' < Q$$

$$Q' = Q + Q_c = P'\tan\varphi' = P\tan\varphi'$$

$$S' = UI' \text{ avec } I' < I$$



$$Q_c = Q' - Q = P(\tan\varphi' - \tan\varphi) \text{ avec } Q_c = -C\omega U^2 \text{ donc}$$

$$\boxed{C = \frac{P(\tan\varphi - \tan\varphi')}{\omega U^2}}.$$